Lycée Pilote Gafsa	*Devoir de synthèse N°3*	$2S_{3-4-5-6}$
Le 28/05/2005		Durée 2h
Profs : H.Lamine & A.Kfinissi		

__Exercice N°1 :__ (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et la droite Δ d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Soit M un point de Δ d'ordonné λ et (MT) une tangente au cercle $\mathscr{C}$ ($T \in \mathscr{C}$).

1) Déterminer le rayon et le centre de $\mathscr{C}$.
2) Calculer MO et MT en fonction de λ.
3) Ecrire l'équation du cercle Γ de centre M et de rayon MT.
4) Montrer que le cercle Γ coupe la droite des abscisses en deux points fixes lorsque le point M décrit Δ.

__Exercice N°2 :__ (2 points)

Déterminer cinq entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trios autres.

__Exercice N°3 :__ (2 points)

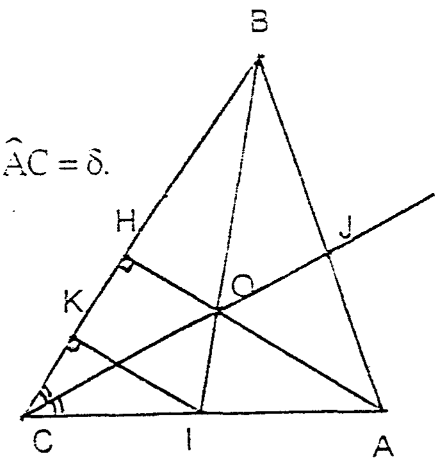
1) Montrer que la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs "(n+1) et n" est un nombre impair.
2) Déduire la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 199$.

__Exercice N°4 :__ (2 points)

ABC un triangle rectangle en A, à côtés entiers. On pose BC = a, AC = b et AB = c. Montrer qu'au moins un des trois entiers a, b et c divise 3.

__Exercice N°5 :__ (9 points)

On donne la figure suivante où [AH] est la hauteur issue de A
[BI] la médiane issue de B
[CJ] la bissectrice intérieur de l'angle $\widehat{ACB}$
K le projeté orthogonal de I = A*C sur (BC).



On pose BC = a, AC = b. AB = c. $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$ et $\widehat{BAC} = \delta$.

1) a) Montrer que (IK) est parallèle à (AH).
   b) Déduire que K = H*C.
2) Montrer que $\dfrac{CI}{CB} = \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{b}{2a}$.
3) Montrer que $\dfrac{OI}{OB} = \dfrac{HK}{HB}$. Déduire que $\dfrac{OI}{OB} = \dfrac{\frac{1}{2}CH}{a - CH}$.
4) a) Exprimer CH à l'aide de b et $\cos\alpha$, puis déduire que $a.\cos\alpha = a - b.\cos\alpha$.

   b) Déduire alors que $\cos\alpha = \dfrac{a}{a+b}$.
5) a) Vérifier que $BH = a - b.\cos\alpha = a.\cos\alpha$.
   b) Déduire que $c.\cos\beta = a.\cos\alpha$

6) a) Exprimer c en fonction de a, b et $\cos\alpha$

b) Montrer que $(a^2 + b^2 - c^2)(a - b) = 2a^2b$.

7) a) Déterminer une relation entre $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\delta$.

b) Montrer que $\cos\alpha = \dfrac{\sin\delta}{\sin\delta - \sin\beta}$.